Universidad Simón Bolívar
Depto. de Matemáticas
Puras y Aplicadas

MA1111 SEGUNDO EXAMEN PARCIAL (30%)
ENERO-MARZO DE 2005
RECUPERACION
18 de marzo de 2005 AUL214 12:30

SOLUCION DEL SEGUNDO PARCIAL DE MA1111 DE RECUPERACION

1.- (8 ptos.) Calcule los siguientes límites :

1a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}+4-2x}{|x|-3}$.

Cuando x tiende hacia 3, se tiene $|x|=x$, luego : $\dfrac{\sqrt{x+1}+4-2x}{|x|-3} = \dfrac{\sqrt{x+1}+4-2x}{x-3} =$

$$= \frac{(\sqrt{x+1}+4-2x)(\sqrt{x+1}-4+2x)}{(x-3)(\sqrt{x+1}-4+2x)} = \frac{-4x^2+17x-15}{(x-3)(\sqrt{x+1}-4+2x)} = \frac{(x-3)(-4x+5)}{(x-3)(\sqrt{x+1}-4+2x)} =$$

$= \dfrac{-4x+5}{\sqrt{x+1}-4+2x}$, por lo cual : $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}+4-2x}{|x|-3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{-4x+5}{\sqrt{x+1}-4+2x} = -\dfrac{7}{4}$.

1b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{9x.\mathrm{sen}(5x)}{1-\cos(7x)}$;

$\dfrac{9x.\mathrm{sen}(5x)}{1-\cos(7x)} = \dfrac{45}{49}\dfrac{(7x)^2}{1-\cos(7x)}\ \dfrac{\mathrm{sen}(5x)}{5x}$, por lo cual $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{9x.\mathrm{sen}(5x)}{1-\cos(7x)} = \dfrac{45}{49} . 2. 1 = \dfrac{90}{49}$.

2.**- (**6 ptos.**)** Demuestre (justificando) que la ecuación $x^3+\mathrm{sen}(x) = 19$

tiene almenos una solución real positiva.

Observando que la función definida por $f(x)= x^3+\mathrm{sen}(x) - 19$ es continua en todo intervalo

[a, b] , aplicartemos el teorema del valor intermedio (Bolzano) a un conveniente intervalo, en cuyos extremos la función tome valores de signo opuesto. Por ejemplo el intervalo puede ser [0,3] (o [2, 3]) , ya que $f(0)= -19 < 0$, $f(2) = 8+\mathrm{sen}(2)-19 < 9-19 < 0$,

$f(3)=27+\mathrm{sen}(3) -19 > 8 > 0$.

3.- (8 ptos.) Halle, si posible, valores para las constantes a, b, c de manera que la función que se define a continuación sea continua y derivable en el conjunto de todos los reales:

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{si } x < -2 \\ c & \text{si } x = -2 \\ 4 - \dfrac{x^2}{2} & \text{si } x > -2 \end{cases} .$$

Observemos que por teoremas conocidos sobre límites, continuidad y derivadas, la función dada es continua y derivable en $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$ cualesquiera que sean los valores de las constantes a, b, c.

Por lo tanto falta únicamente asegurar la continuidad y derivabilidad en x= -2 .

Para que f sea continua en x = -2 debe ser $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = f(-2) = c$ y para que exista el $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ deben ser iguales los dos límites por la derecha y por la izquierda.

Tenemos : $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} (ax+b) = -2a+b$; $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} (4 - \dfrac{x^2}{2}) = 2$.

Por lo tanto, para que f sea continua en x= -2 debe ser : -2a+b = 2 = c ,

es decir : $\begin{cases} b = 2a+2 \\ c = 2 \end{cases}$;

Para que f sea derivable en x = -2 debe ser continua [por lo cual deberá ser b=2a+2 , c=2] y debe existir $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{f(x)-2}{x+2}$;

de nuevo, como f está definida por fórmulas diferentes a la izquierda y a la derecha de -2 , deberemos hallar los límites laterales e igualarlos.

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{f(x)-2}{x+2} = \lim_{x\to -2^-} \frac{(ax+b)-2}{x+2} = \lim_{x\to -2^-} \frac{ax+(2+2a)-2}{x+2} = a ;$$

$\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{f(x)-2}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{(4 - x^2/2)-2}{x+2} = 2$. Por lo tanto debe ser a=2 y por consiguiente b= 6 .

Los valores de las constantes a, b, c para los cuales f es continua y derivable en todo R son entonces : a=2 , b=6, c=2 .

4.- (8 ptos.) Dada la función definida por $g(x) = \dfrac{x+2\sqrt{3}.\cos(x)}{6x+1-\pi}$,

4a) Halle la derivada, g'(x) ;

4b) halle la derivada de g en el pto. $x=\dfrac{\pi}{6}$;

4c) halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de g en el punto $A(\dfrac{\pi}{6}, 3+\dfrac{\pi}{6})$.

4a) $g'(x) = \dfrac{(1-2\sqrt{3}.\text{sen}(x))(6x+1-\pi) - 6(x+2\sqrt{3}.\cos(x))}{(6x+1-\pi)^2}$; **4b**) $g'(\dfrac{\pi}{6}) = -(\sqrt{3} + 17 + \pi)$;

4c) ecuación de la recta tangente : $y = 3 + \dfrac{\pi}{6} - (x - \dfrac{\pi}{6})(\sqrt{3} + 17 + \pi)$.